Feuille d'exercices

3^{eme} année *Mr: Bouhouch Ameur*

Exercice n°1:

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_0=0$ et $U_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$

1) Calculer U_1 et U_2. En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN , on a : $0 \leq U_n \leq 1$.
3) Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi]$, on a : $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
4) a) Montrer alors que $U_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in$ IN.

   b) Calculer la limite de la suite (U_n).
5) Déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice n°2:

Montrer par récurrence que :

1) $1+3+5+........+(2n+1)=(n+1)^2$ pour tout $n \in$ IN*.
2) $1^2+2^2+3^2+..................+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. pour tout $n \in$ IN*.
3) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+..........+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in$ IN*.

Exercice n°3:

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par $U_0=2$ et $U_{n+1}=\dfrac{4U_n+2}{U_n+5}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a: $U_n > 1$.
2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+2}$

   a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

   b) Déterminer V_n puis U_n en fonction de n.

   c) Calculer la limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   d) Soit $S_n=V_0+V_1+.............+V_n$. Calculer S_n en fonction de n.

Exercice n°4:

Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points A(-1,0,2) ; B(0,0,1) et C(1,1,1).

1) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.
3) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice n°5:

Dans l'espace ζ rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne le point A(1,-1,2) et le vecteur $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2) Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est

$$(\Delta):\begin{cases} x=t \\ y=4t \quad\quad t\in IR \\ z=2t \end{cases}$$

Montrer que les droites (D) et(Δ) ne sont pas coplanaires.

3) Soit P le plan passant par O et perpendiculaire à (D).
   Montrer que (Δ) est contenue dans le plan P.
4) déterminer l'intersection de (Δ) et P.

Exercice n°6:

On considère les points A(1,2,-1) et B(2,1,1).

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).
2) Pour tout réel m, on considère le plan P_m : x+y+m-3=0.
   a) Montrer que (AB)//P_m .
   b) Pour quelle valeur de m, la droite (AB) est incluse dans P_m ?
3) Montrer que pour tout réel m, on a : Q $\perp$ P_m .

Exercice n°6:

Soit f la fonction définie sur IR par f(x)= 2sin(2x+$\frac{2\pi}{3}$). Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un R.O.N. $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que π est une période de f.
2) Montrer que la droite (D):x=$\frac{-\pi}{3}$ est un axe de symétrie pou (C).
3) Déduire qu'on peut réduire l'intervalle d'étude de f à $\left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$.
4) Etudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ et dresser son tableau de variation.
5) Tracer la courbe (C) la restriction de f sur $[-\pi,\pi]$.